METODOLOGIA PARA SOLUÇÃO ACOPLADA DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DE ESCOAMENTOS

Aluno: Thiago Almeida Cunha
Orientadora: Angela Ourivio Nieckele

Introdução

Com os grandes avanços de recursos computacionais, cada vez mais, soluções numéricas tem se tornando uma importante ferramenta para auxiliar no projeto e operação de diversas atividades industriais. Dessa forma, torna-se fundamental, a obtenção de soluções precisas com baixo tempo de processamento e conseqüentemente baixo custo. Para alcançar este objetivo é preciso desenvolver algoritmos eficientes e precisos de discretização, assim como algoritmos robustos e rápidos para a solução do sistema algébrico resultante da discretização. Este segundo tema é o foco o presente trabalho de pesquisa.

Objetivos

Desenvolver um estudo do algoritmo de solução de Matriz Tri-Diagonal por blocos (TDMA por blocos), usado para resolver sistemas algébricos resultantes da discretização de um conjunto de equações de conservação. No presente trabalho, as equações de conservação consideradas correspondem ao Método de Dois fluidos [1], usado para modelar um escoamento com uma fase gasosa e outra líquida, seguindo um padrão de golfadas.

Comparação de desempenho entre um algoritmo de solução seqüencial das diversas equações de conservação e de um algoritmo acoplado.

Metodologia

O Modelo de Dois Fluidos corresponde a um sistema de equações para determinar a fração de volumétrica de gás α_G, a pressão P, a velocidade do gás U_G e do líquido U_L, formado por uma equação de conservação de massa para o gás e líquido

$$\frac{\partial(\rho_G \alpha_G)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_G \alpha_G U_G)}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial(\rho_L \alpha_L)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_L \alpha_L U_L)}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

e de quantidade de movimento linear para cada fase K,

$$\frac{\partial(\rho_G \alpha_G U_G)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_G \alpha_G U_G^2)}{\partial x} == -\alpha_G \frac{\partial P}{\partial x} - \alpha_G \rho_G g \frac{\partial h_L}{\partial x} \cos\beta - \alpha_G \rho_G g \,\mathrm{sen}\,\beta - \frac{\tau_{wG} S_G}{A} - \frac{\tau_i S_i}{A} \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\rho_L \alpha_L U_L)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_L \alpha_L U_L^2)}{\partial x} = -\alpha_L \frac{\partial P}{\partial x} - \alpha_L \rho_L g \frac{\partial h_L}{\partial x} \cos\beta - \alpha_L \rho_L g \,\mathrm{sen}\,\beta - \frac{\tau_{wL} S_L}{A} + \frac{\tau_i S_i}{A} \tag{3}$$

Para a discretização das equações de conservação do Modelo de Dois Fluidos, foi usado o método dos volumes finitos [2], que consiste em integrar as equações de conservação em volumes de controle. O sistema resultante corresponde ao seguinte conjunto de equações tri-diagonais

$$a_P^\alpha \, \alpha_{G,P} = a_E^\alpha \, \alpha_{G,E} + a_W^\alpha \, \alpha_{G,W} + b^\alpha \tag{4}$$

$$a_P^P P_P = a_W^P P_W + a_E^P P_E + b^P \tag{5}$$

$$a_w^{U_K} U_{K,w} = a_{ww}^{U_K} U_{K,ww} + a_e^{U_K} U_{K,e} + b^K - \alpha_{K,w} A (P_P - P_W) \tag{6}$$

Cada equação pode ser resolvida de forma muito eficiente com o algoritmo de Thomas [2].

Tendo por objetivo minimizar o tempo computacional, pode-se resolver de forma simultânea as 4 variáveis $\mathbf{\Phi}^T = [\alpha_G \quad U_G \quad U_L \quad P]$ com um algoritmo TDMA por blocos, pois a matriz resultante é formada por uma matriz tri-diagonal, onde cada elemento da matriz é uma matriz 4 × 4.

$$\mathrm{A}_i \Phi_i = \mathrm{B}_i \Phi_{i+1} + \mathrm{C}_i \Phi_{i-1} + \mathrm{D}_i \tag{7}$$

Visando aumentar o acoplamento entre as equações, Winicki (2007) reescreveu o termo b^K em função das variáveis dependentes, resultando no seguinte de matrizes de coeficientes

$$[\mathrm{A_i}] = \begin{bmatrix} a_p^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ a_p^{U_G,\alpha} & a_w^{U_G} & a_p^{U_G U_L} & \alpha_{G,w} A \\ a_p^{U_L \alpha} & a_p^{U_L U_G} & a_w^{U_L} & \alpha_{L,w} A \\ 0 & 0 & 0 & a_p^P \end{bmatrix}; [\mathrm{B_i}] = \begin{bmatrix} a_E^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_e^{UG} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_e^{U_L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_E^P \end{bmatrix}; [\mathrm{C_i}] = \begin{bmatrix} a_W^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ a_{W_G}^{\alpha} & a_{ww}^{U_G} & 0 & \alpha_{G,w} A \\ a_{w_L}^{\alpha} & 0 & a_{ww}^{U_L} & \alpha_{L,w} A \\ 0 & 0 & 0 & a_W^P \end{bmatrix}; [\mathrm{D_i}] = \begin{bmatrix} b^{\alpha} \\ bb^{U_G} \\ bb^{U_L} \\ b^P \end{bmatrix} \tag{8}$$

Apesar de Winicki (2007) haver reduzido o tempo de processamento, o ganho foi pequeno, devido ao pequeno acoplamento da equação da pressão com as outras equações de conservação. Neste trabalho, a equação da pressão foi trabalhada de forma a ser rescrita com acoplamento implícito com as velocidades das fases e fração volumétrica de gás. Como resultado obtém-se coeficientes não nulos para a última linha de cada uma das matrizes da Eq. (4).

$$[\mathrm{A_i}] = \begin{bmatrix} a_p^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ a_p^{U_G,\alpha} & a_w^{U_G} & a_p^{U_G U_L} & \alpha_{G,w} A \\ a_p^{U_L,\alpha} & a_p^{U_L U_G} & a_w^{U_L} & \alpha_{L,w} A \\ a_p^{P,\alpha} & a_p^{P,U_G} & a_p^{P,U_L} & a_p^P \end{bmatrix}; [\mathrm{B_i}] = \begin{bmatrix} a_E^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_e^{U_G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_e^{U_L} & 0 \\ a_E^{P,\alpha} & a_E^{P,U_G} & a_E^{P,U_L} & a_E^P \end{bmatrix}; [\mathrm{C_i}] = \begin{bmatrix} a_W^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ a_{W_G}^{\alpha} & a_{ww}^{U_G} & 0 & \alpha_{G,w} A \\ a_{w_L}^{\alpha} & 0 & a_{ww}^{U_L} & \alpha_{L,w} A \\ a_W^{P,\alpha} & a_W^{P,U_G} & a_W^{P,U_L} & a_W^P \end{bmatrix}; [\mathrm{D_i}] = \begin{bmatrix} b^{\alpha} \\ bb^{U_G} \\ bb^{U_L} \\ bb^P \end{bmatrix} \tag{9}$$

Comentários finais

Durante o período deste trabalho, o Modelo de Dois Fluidos foi analisado, assim como o método de Volumes de Controle, de forma a ser possível identificar os coeficientes das equações de conservação discretizadas. Como o programa original [3] foi escrito em Fortran, durante este período, também foi necessário aprender a linguagem de programação FORTRAN.

Uma vez identificado os coeficientes das matrizes (Eq. 9) é necessário resolver diversos problemas teste e comparar o tempo de processamento do algoritmo de solução seqüencial e acoplado, visando identificar ganhos com relação ao tempo de processamento.

Referências

1 - ISHII, M.Thermo–Fluid Dynamic Theory of Two–Phase Flow. Eyrolles, Paris, 1975.

2 -PATANKAR, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hem. Pub. Co., 1980.

3 - WINICKI. D.,Solução Das Equações do Modelo de Dois Fluidos Através do Método Numérico TDMA por Blocos; Projeto Final, Dept. Eng. Mecânica, 2007.